

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Донецкий государственный университет»

Факультет математики и информационных технологий
Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

УТВЕРЖДАЮ
проректор

_____ П. А. Машаров
«17» апреля 2025 г.
МП

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Укрупненная группа направлений подготовки	01.00.00 Математика и механика
Программа высшего образования	Программа магистратуры
Направление подготовки	01.04.01 Математика
Направленность (профиль) образовательной программы	Математика
Квалификация	Магистр
Форма обучения	Очная

Рабочая программа может быть адаптирована для лиц
с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

Донецк 2025

Рабочая программа дисциплины «**Гармонический анализ**» для обучающихся по направлению подготовки 01.04.01 Математика (Профиль: Математика), составлена на основании Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования – магистратура по направлению подготовки 01.04.01 Математика, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 января 2018 г. № 12 (с изм. и доп.), Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры, утвержденного приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 06 апреля 2021 г. № 245 (с изм. и доп.), в соответствии с учебным планом, утвержденным Ученым советом ФГБОУ ВО «ДонГУ» для набора 2025 года.

Разработчик:

профессор кафедры математического анализа и
дифференциальных уравнений,
д-р физ.-мат. наук, доцент

В.П. Заставный

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры математического анализа и
дифференциальных уравнений.
Протокол от 08.04.2025 г. № 9а

Заведующий кафедрой

В. В. Волчков

СОГЛАСОВАНО:

Декан факультета математики и
информационных технологий
16.04.2025 г.

И. А. Моисеенко

Учебно-методическая комиссия факультета математики и информационных технологий.
Протокол от 16.04.2025 г. № 3.
Председатель

Л. И. Селякова

Руководитель основной образовательной
программы, д-р физ.-мат. наук, проф.
16.04.2025 г.

В. В. Волчков

1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

1.1. Требования к предварительной подготовке обучающихся, предшествующие и сопутствующие дисциплины, на которых основывается изучение данной:
базовая подготовка по математике в объёме программы средней школы;
дисциплины программы бакалавриата: Алгебра, Аналитическая геометрия, Математический анализ.

1.2. Дисциплины, курсовые работы и практики, для которых освоение данной дисциплины необходимо как предшествующее:

Избранные задачи элементарной и высшей математики, Контрпримеры в анализе, Научный семинар по вопросам математического анализа,

Производственная практика: научно-исследовательская работа (обязательная),
Производственная практика: преддипломная практика (обязательная).

2. ОПИСАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1. Общая характеристика

Наименование показателя	Значение показателя
Название образовательной программы (далее – ОП)	01.04.01 Математика (Профиль: Математика)
Шифр и название в соответствии с учебным планом	Б1.Б.8. Гармонический анализ
Часть образовательной программы	Базовая часть
Количество зачетных единиц / всего часов	6 / 216

В случае предъявления от обучающегося или его родителя (законного представителя) заявления на обучение по адаптированной образовательной программе высшего образования, подкрепленного заключением психолого-медико-педагогической комиссии (ПМПК) или медико-социальной экспертизы (МСЭ) с рекомендациями создания индивидуальной программы реабилитации и абилитации (ИПРА), данная рабочая программа может быть адаптирована с учетом индивидуальных особенностей здоровья обучающегося.

2.2. Распределение часов по формам и периодам обучения

Форма обучения	курс	семестр	Общее количество часов					Форма контроля
			лекционных	лабораторных	практических	самостоятельной работы + контроль	всего	
Очная	1	1	17	0	34	57	108	экзамен
Очная	1	2	17	0	34	57	108	экзамен
Очная, всего			34	0	68	114	216	

3. ЦЕЛИ ДИСЦИПЛИНЫ

Фундаментальная подготовка в области гармонического анализа; изложение основных понятий и результатов теории рядов Фурье и преобразования Фурье, овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования в приложениях.

4. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ КОМПОНЕНТА ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ, ИХ ИНДИКАТОРЫ И ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ

4.1. Компетенции

ОПК-2. Способен строить и анализировать математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении

4.2. Индикаторы компетенций

ОПК-2.1. Обладает опытом создания и исследования математических моделей в современном естествознании, технике, экономике и управлении и разработки теорий и методов для их описания

4.3. Результаты обучения

ОПК-2.1.1. Знает классические результаты гармонического анализа, его общие проблемы и задачи.

ОПК-2.1.2. Знает условия сходимости рядов Фурье.

ОПК-2.1.3. Умеет находить суммы тригонометрических рядов, разложения в ряд или интеграл Фурье.

5. ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Название темы	Краткое содержание темы (вопросы темы)
1 семестр. Ряды Фурье	
Раздел 1. Тригонометрические ряды и ряды Фурье*	1.1. Периодические функции и их свойства. Тригонометрические ряды. Сопряженный тригонометрический ряд. 1.2. Вычисление сумм некоторых тригонометрических рядов (ядра Пуассона, Дирихле). 1.3. Ортогональность тригонометрической системы. Ряды Фурье. 1.4. Вычисление рядов Фурье некоторых функций. 1.5. Полнота тригонометрической системы. 1.6. Равенство Парсеваля.
Раздел 2. Коэффициенты Фурье. Теоремы о сходимости рядов Фурье*	2.1. Формальные операции над рядами Фурье. 2.2. Разложение функций в ряды по косинусам и синусам. 2.3. Свертка периодических функций. 2.4. Теорема Римана-Лебега. 2.5. Представление частных сумм ряда Фурье с помощью ядра Дирихле. Достаточные условия сходимости в точке. Признак Дини. 2.6. Принцип локализации Римана-Лебега. 2.7. Признаки Жордана и Дирихле. 2.8. Интегрирование рядов Фурье.
Раздел 3. Суммируемость рядов Фурье *	3.1. Константы Лебега. 3.2. Суммируемость рядов Фурье методом средних арифметических. 3.3. Суммируемость рядов Фурье методом Абеля-Пуассона.
2 семестр. Интеграл Фурье	
Раздел 4. L_1 теория преобразования Фурье *	4.1. Свойства, свертка и формула умножения. 4.2. Формула обращения и теорема единственности. 4.3. Формула суммирования Пуассона.

	4.4 Равенство Планшереля и формула обращения (общий случай). 4.5 Достаточные условия интегрируемости преобразования Фурье, достаточные условия справедливости формулы обращения в точке.
Раздел 5. L_2 теория преобразования Фурье *	5.1 Пространство $L^{1,2}$ и его свойства (равенства Парсеваля и Планшереля). Определение преобразования Фурье в L_2 по непрерывности. 5.2 Определение преобразования Фурье в L_2 как предел в среднем. 5.3 Явная формула для преобразования Фурье и формула обращения. 5.4 Функции Эрмита: определение, ортогональность, собственные функции преобразования Фурье, полнота, базис, разложение по базису. Представление преобразования Фурье в L_2 с помощью ортогонального ряда. Формула обращения в L_2 . Применения преобразования Фурье. 5.5 Преобразования Фурье в L_p . **

* – практико-ориентированные темы.

** – вопросы, выносимые на самостоятельное изучение

6. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Форма обучения – очная, курс – 1, семестр – 1

Наименования разделов и тем	Количество часов				
	Лекц.	Лабор.	Практ.	СРС+К	Всего
Раздел 1. Тригонометрические ряды и ряды Фурье*	6		12	25	43
Раздел 2. Коэффициенты Фурье. Теоремы о сходимости рядов Фурье*	7		14	25	46
Раздел 3. Суммируемость рядов Фурье *	4		8	7	19
ИТОГО ЗА СЕМЕСТР	17		34	57	108

6.2. Форма обучения – очная, курс – 1, семестр – 2

Наименования разделов и тем	Количество часов				
	Лекц.	Лабор.	Практ.	СРС+К	Всего
Раздел 4. L_1 теория преобразования Фурье *	9		17	28	54
Раздел 5. L_2 теория преобразования Фурье *	8		17	29	54
ИТОГО ЗА СЕМЕСТР	17		34	57	108
ИТОГО ПО КОМПОНЕНТУ ОПОП	34		68	114	216

* – практико-ориентированные темы.

** – вопросы, выносимые на самостоятельное изучение

7. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ (СРЕДСТВА) ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

7.1. Контрольные вопросы

1 семестр. Ряды Фурье

1. Периодические функции и их свойства. Тригонометрические ряды. Сопряженный тригонометрический ряд.

2. Вычисление сумм некоторых тригонометрических рядов (ядра Пуассона, Дирихле).
3. Ортогональность тригонометрической системы. Ряды Фурье.
4. Вычисление рядов Фурье некоторых функций.
5. Полнота тригонометрической системы.
6. Равенство Парсеваля.
7. Формальные операции над рядами Фурье.
8. Разложение функций в ряды по косинусам и синусам.
9. Свертка периодических функций.
10. Теорема Римана-Лебега.
11. Представление частных сумм ряда Фурье с помощью ядра Дирихле. Достаточные условия сходимости в точке. Признак Дини.
12. Принцип локализации Римана-Лебега.
13. Признаки Жордана и Дирихле.
14. Интегрирование рядов Фурье.
15. Константы Лебега.
16. Суммируемость рядов Фурье методом средних арифметических.
17. Суммируемость рядов Фурье методом Абеля-Пуассона.

2 семестр. Интеграл Фурье

1. L_1 теория преобразования Фурье: примеры, свойства, свертка и формула умножения.
2. L_1 теория преобразования Фурье: формула обращения и теорема единственности.
3. Формула суммирования Пуассона.
4. L_1 теория преобразования Фурье: равенство Планшереля и формула обращения (общий случай).
5. Достаточные условия интегрируемости преобразования Фурье, достаточные условия справедливости формулы обращения в точке.
6. Пространство $L^{1,2}$ и его свойства (равенства Парсеваля и Планшереля). Определение преобразования Фурье в L_2 по непрерывности.
7. Определение преобразования Фурье в L_2 как предел в среднем.
8. L_2 теория преобразования Фурье: явная формула для преобразования Фурье и формула обращения.
9. Функции Эрмита: определение, ортогональность, собственные функции преобразования Фурье, полнота, базис, разложение по базису. Представление преобразования Фурье в L_2 с помощью ортогонального ряда. Формула обращения в L_2 .
10. Преобразование Фурье в L_p : прямой подход, интерполяционная теорема Рисса-Торина, применение теоремы Рисса-Торина к преобразованию Фурье при $1 < p < 2$, неравенство Хаусдорфа-Юнга, случай $p > 1$.

7.2. Темы письменных работ (типы задач)

Контрольные работы по практике и темам:

1 семестр – разложение функции в ряд Фурье (в том числе по синусам или косинусам);

2 семестр – преобразования Фурье функции и формула обращения.

Контрольная работа по проверке теоретических знаний – по всем темам, с использованием указанных выше контрольных вопросов.

7.3. Образец содержания экзаменационного билета

1 семестр

1. Полнота тригонометрической системы.

2. Суммируемость рядов Фурье методом Абеля-Пуассона.
3. Разложить функцию в ряд Фурье: $f(x) = \text{sign}(\cos x)$, $x \in (-\pi, \pi)$.
4. Разложить функцию в ряд по синусам: $f(x) = x^2$, $x \in (0, \pi)$.

2 семестр

1. L1 теория преобразования Фурье: примеры, свойства, свертка и формула умножения.
2. L2 теория преобразования Фурье: явная формула для преобразования Фурье и формула обращения.
3. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = \text{sign}(\cos x)$, $x \in (-\pi, \pi)$ и $f(x) = 0$ вне указанного интервала.
4. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = x$, $x \in (\pi, 2\pi)$ и $f(x) = 0$ вне указанного интервала.

В случае ведения учебного процесса с использованием электронного обучения и дистанционных образовательных технологий, содержание билета может отличаться от приведенного.

8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БАЛЛОВ, КОТОРЫЕ ПОЛУЧАЮТ ОБУЧАЮЩИЕСЯ

Общая оценка знаний обучающихся по дисциплине проводится по 100-балльной шкале исходя из максимума, приведенного в таблице ниже.

Организационно-учебная работа в аудитории оценивается на основе таких критериев как посещаемость занятий, своевременное и качественное выполнение домашних заданий, активность во время проведения лекционных и практических занятий (участие в обсуждении текущего и пройденного материала, решение задач и т.п.).

Самостоятельная работа оценивается на основе предоставленных на проверку выполненных домашних, индивидуальных заданий с учетом своевременности их предоставления и соответствия требованиям к их выполнению.

Количество баллов за контрольную работу вычисляется как сумма баллов за все входящие в её состав задания. Каждое задание оценивается исходя из максимально возможного количества баллов с учетом правильности выполнения задания, полноты приводимых обоснований.

По результатам работы в семестре обучающийся, набравший не менее 60 баллов, имеет право получить оценку. Те, кто претендует на более высокий балл, проходят промежуточную аттестацию. Максимальное количество баллов на промежуточной аттестации – 100. Общее количество баллов за семестр вычисляется как максимальная из полученных за семестр и на промежуточной аттестации и выставляется согласно принятому порядку.

8.1. Семестр 1

Номера разделов	Виды работ	Максимальное количество баллов
1-3	Организационно-учебная работа в аудитории	10
	Самостоятельная работа	20
	Контрольные работы по практике	50
	Контрольная работа по теоретическому материалу	20
ИТОГО		100
Экзамен		100
Общий итог за семестр		100

8.2. Семестр 2

Номера разделов	Виды работ	Максимальное количество баллов
4-5	Организационно-учебная работа в аудитории	10
	Самостоятельная работа	20
	Контрольные работы по практике	50
	Контрольная работа по теоретическому материалу	20
ИТОГО		100
Экзамен		100
Общий итог за семестр		100

Соответствие баллов оценке

Количество баллов из 100	ECTS	Оценка по пятибалльной шкале	
		Экзамен, дифференцированный зачет	Зачет
90-100	A	отлично	зачтено
80-89	B	хорошо	зачтено
75-79	C		зачтено
70-74	D	удовлетворительно	зачтено
60-69	E		зачтено
35-59	FX	неудовлетворительно	не зачтено
0-34	F		не зачтено

9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА

Учебные занятия проводятся в Главном корпусе ДонГУ (г. Донецк, пр. Гурова, 6). Для проведения занятий требуется аудитория, оборудованная меловой или маркерной доской, мультимедийный проектор и экран, ноутбук, комплект учебной мебели для студентов, рабочее место преподавателя, выход в Интернет – проводной или с использованием Wi-Fi.

Для самостоятельной работы используются текстовые и электронные ресурсы Научной библиотеки университета и других электронных библиотечных баз данных, учебно-методическое обеспечение, представленное в учебно-методическом кабинете Главного корпуса (ауд.405).

Обучающиеся имеют возможность использовать учебные материалы по дисциплине, размещенные на платформе Moodle Центра дистанционного образования ФГБОУ ВО «ДонГУ». При изучении дисциплины могут применяться электронное обучение и дистанционные образовательные технологии.

С использованием ресурсов платформы дистанционного образования осуществляется текущий контроль знаний обучающихся на основе тестирования и проверки результатов самостоятельной работы.

10. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

10.1. Основная литература

1. Volchkov V.V. Introduction to Harmonic Analysis [Electronic resource] : workbook / V.V. Volchkov, Vit.V. Volchkov– Donetsk: DonNU, 2017. – Electronic data (1 file).

2. Элементы гармонического анализа : учебно-методическое пособие / сост. В. В. Волчков, Вит. В. Волчков. - Донецк : ДонНУ, 2013. – 92.

10.2. Дополнительная литература

3. Кудрявцев, Лев Д. Краткий курс математического анализа : В 2 т. : учеб. для студентов вузов. Т. 2 : Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ / Л. Д. Кудрявцев. - Изд. 3-е. - М. : Физматлит, 2003. - 424 с.
4. Теория аппроксимации и гармонический анализ / В. П. Моторный и др. ; Институт прикладной математики и механики НАН Украины. - Киев : Наук. думка, 2012. - 314 с.
5. Теория аппроксимации и гармонический анализ [Электронный ресурс] / В. П. Моторный и др. ; [редкол.: А. М. Ковалев (отв. ред.) и др.] ; Национальная академия наук Украины, Институт прикладной математики и механики. - Киев : Наукова думка, 2011. - Электронные данные (1 файл).
6. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа: [Учеб. пособие мат. специальностей ун-тов] / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. - 5-е изд. - М. : Наука, 1981. - 543 с. Колмогоров А.Н., Фомин С.В., Элементы теории функций и функционального анализа, М.: Наука, 1981, 543с.
7. Заставный, В. П. Актуальные проблемы современного анализа [Электронный ресурс] : учебное пособие / В. П. Заставный, В. В. Волчков, Вит. В. Волчков ; ГОУ ВПО Донецкий национальный университет, Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений. - Донецк : ДонНУ, 2017. - Электронные данные (1 файл). Для читателей НБ ДонГУ. Размер файла: 1,21 Мб. Формат: pdf.
http://library.donnu.ru/el/ed/2024_VD84.pdf

11. ИНФОРМАЦИОННЫЕ РЕСУРСЫ

1. **Национальная электронная библиотека (НЭБ):** федеральная государственная информационная система / Министерство Культуры РФ; Российская государственная библиотека. – Москва, 2019- . – URL: <https://rusneb.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный, подписка. Необходима установка программного обеспечения. – Текст: электронный.
2. **eLIBRARY.RU:** научная электронная библиотека: сайт. – Москва, 2000- . – URL: <https://elibrary.ru> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.
3. Научная электронная библиотека **«КиберЛенинка»:** сайт / Ассоциация «Открытая наука». – Москва, 2014- . – URL: <https://cyberleninka.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный. – Текст: электронный.
4. Электронно-библиотечная система **«Лань»:** [сайт]. – URL: <https://e.lanbook.com> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: издания Сетевой электронной библиотеки, для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.
5. **ЭБС Юрайт:** электронная библиотечная система: сайт. – Москва, 2013. – URL: <https://urait.ru/library/svobodnyy-dostup/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: издания свободного доступа, для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.
6. **Электронно-библиотечная система ДонГУ:** сайт / ФГБОУ ВО «ДонГУ». – Донецк, 2016- . – URL: <http://library.donnu.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный. – Текст: электронный.
7. **Электронный каталог** Научной библиотеки ДонГУ: раздел сайта / НБ ДонГУ. – Текст: электронный // ЭБС ДонГУ: сайт. – URL: <http://library.donnu.ru/catalog/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: поиск свободный, электронные документы – для пользователей ДонГУ.

8. **Электронный архив ДонГУ:** раздел сайта / НБ ДонГУ. – Текст: электронный // ЭБС ДонГУ: сайт. – URL: <http://repo.donnu.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный.

12. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

1. Windows 7 PRO (корпоративная лицензия ДонГУ № 46484614)
2. Microsoft Office (корпоративная лицензия ДонГУ № 46472919)
3. Microsoft Visual Studio (лицензия программы Dream Spark для высших учебных заведений)
4. Антивирус Касперского, Adobe Acrobat Reader, xPDF (лицензии GPL, Apache, BSD для свободного программного обеспечения).